V-14 (1 h 7 min) 31-Marzo-2019 Resumen de Miguel Cañizares	**Función de Green**

La función de Green se utiliza como método para resolver ecuaciones diferenciales no homogéneas, del tipo Operador diferencial [A] actuando sobre función incógnita *f(x)* igual a función conocida *g(x)*: $[\boldsymbol{A}]\boldsymbol{f(x)} = \boldsymbol{g(x)}$

Ejemplo: $f''(x) - f(x) = x^2 \rightarrow \left[\frac{d^2}{dx^2} - 1\right] f(x) = x^2$

La f. de Green, correspondiente a una ecuación diferencial concreta, es una función de dos variables **G(x, x´)**, que una vez calculada (después veremos cómo se obtiene) permite hallar la solución de la ecuación diferencial haciendo:

$$\boldsymbol{f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,x') \, g(x') \, dx'} \qquad \textbf{(I)}$$

ANALOGÍA.- Supongamos ecuación matricial en R^n: una matriz **A** de elementos A_{ij}, que multiplicada por una matriz columna de elementos f_j desconocidos da como resultado la matriz columna de elementos g_i conocidos:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} \rightarrow \sum_{j=1}^{j=n} A_{ij} \, f_j = g_j$$

Se despeja hallando la matriz inversa, que llamamos $G = (A)^{-1}$

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11} & \cdots & G_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n1} & \cdots & G_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} \xrightarrow{\textit{Renombramos índices}} f_x = \sum_{x'=1}^{x'=n} \boldsymbol{G_{xx'}} \, g_{x'}$$

Versión discreta de la F. Green: $\boldsymbol{G_{xx'}}$

Si consideramos continuos los valores de los índices *x* y *x´*, extendidos entre ±∞, se llega intuitivamente a **(I)**

Siguiendo con la analogía, un ejemplo de matriz **(A),** que será relevante en QFT es la formada, para el caso n = 8, como la que se muestra abajo, con esos números y estructura casi diagonal. Se calcula su inversa **(G)**, que se expone también abajo, mostrando las dos variables (x, x´) y el valor de G, al que se asocia cualitativamente la claridad de la cuadrícula

A=

2	-1	0	0	0	0	0	0
-1	2	-1	0	0	0	0	0
0	-1	2	-1	0	0	0	0
0	0	-1	2	-1	0	0	0
0	0	0	-1	2	-1	0	0
0	0	0	0	-1	2	-1	0
0	0	0	0	0	-1	2	-1
0	0	0	0	0	0	-1	2

G = 1/9·
(claridad)

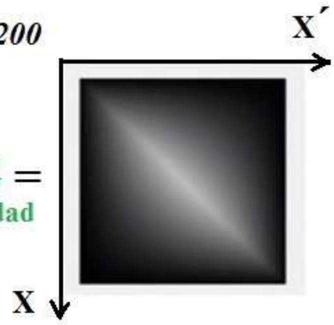
X \ X´	1	2	3	4	5	6	7	8
1	8	7	6	5	4	3	2	1
2	7	14	12	10	8	6	4	2
3	6	12	18	15	12	9	6	3
4	5	10	15	20	16	12	8	4
5	4	8	12	16	20	15	10	5
6	3	6	9	12	15	18	12	6
7	2	4	6	8	10	12	14	7
8	1	2	3	4	5	6	7	8

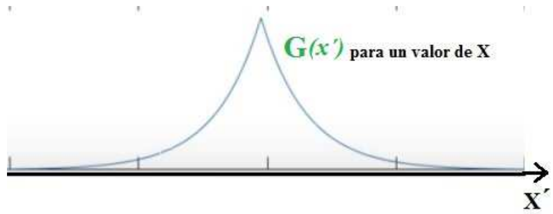
Para entender lo que ocurrirá con la función de Green, análoga a la matriz G, aumentamos considerablemente el orden de ésta (no podemos hacerlo hasta infinito) y programada con el ordenador, haciendo que las casillas sean más claras cuanto mayor sea el valor de G, se obtendría lo que muestra la imagen:

Con n = 200

A =

G =
claridad





La gráfica de la derecha, que corresponde a una fila de la matriz (determinado valor de x) indica cómo varía **G** con ***x´*** y vemos que en el sumatorio $f_x = \sum_{x'=1}^{x'=n} \boldsymbol{G_{xx'}} \, g_{x'}$ para hallar la imagen *f* de determinado valor de **x**, se podrían despreciar los sumandos con los valores $\boldsymbol{G_{xx'}}$ más pequeños

¿Cómo podemos hallar la función de Green correspondiente a ecuación diferencial concreta? $[\boldsymbol{A}]f(x) = g(x)$

Aplicamos el operador diferencial **[A]** (correspondiente a una ecuación diferencial concreta) a la expresión **(I)** de *f(x)*. Al no depender de x los límites de integración, el operador puede entrar dentro de la integra. Además dicho operador, al actuar sobre funciones de x, afectará únicamente a **G(x, x´)**:

$$[\boldsymbol{A}]\, f(x) = g(x) \quad \rightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \{[\boldsymbol{A}] G(x, x')\}\, g(x')\, dx' = g(x)$$

Comparando la igualdad anterior con la expresión **(IV)** de resumen del V-13: $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x) \cdot \delta(x-a) \cdot dx = h(a)$ se comprende que, para que sea cierta, lo encerrado entre las llaves debe ser igual a una delta de Dirac: δ(x´- x) = δ(x- x´) (la delta de Dirac es una función par). Luego para hallar **G(x, x´)** hay que plantear:

$$[\boldsymbol{A}]G(x, x') = \delta(x - x') \qquad \textbf{(II)}$$

Para resolver la ecuación **(II)** y calcular la función de Green se puede hacer a través de su Transformada de Fourier, calculando primero sus "funciones coeficientes" $\widehat{G}(K, x')$. Aplicamos la (I) de resumen de V-13 a la función de Green **G (x, x´)** para expresarla como suma (integración) de sus "funciones coeficientes" $\widehat{G}(K, x')$ en las que aparece K en lugar de x:

$$G(x, x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{G}(K, x')\ e^{iK\,x} dK$$

Expresada así la función de Green, le aplicamos la ecuación **(II)** introduciendo el operador **[A]** dentro de la integral, que sólo afectará a la exponencial, ya que las "funciones coeficientes" no dependen de x. Además utilizamos la definición de "andar por casa" de la delta de Dirac, vista en **(III)** de resumen de V-13:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{G}(K, x')\ \{[A]e^{iK\,x}\} dK = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iK\,(x-x')} dK \ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{iK\,(x-x')} dK$$

Simplificando y despejando en la igualdad anterior, queda: $\widehat{G}(K, x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{iK\,(x-x')}}{\{[A]e^{iK\,x}\}}$ **(III)**

Hasta aquí un método, más o menos general, para hallar las "funciones coeficientes" con las que se reconstruirá la función de Green aplicando de nuevo la expresión de la transformada de Fourier. Vemos que el resultado depende de cómo sea el operador [A] de la ecuación diferencial concreta.

Lo aplicaremos al **EJEMPLO** de la ecuación diferencial que pusimos al principio, en la que $[A] = \left[\frac{d^2}{dx^2} - 1\right]$

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - 1\right] e^{iKx} = \frac{d^2 e^{iKx}}{dx^2} - e^{iKx} = -K^2 e^{iKx} - e^{iKx} = -(1+K^2)e^{iKx}$$

Aplicando **(III)**: $\widehat{G}(K, x') = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{iK\,(x-x')}}{(1+K^2)e^{iKx}} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-iKx'}}{1+K^2}$

Finalmente, reconstruimos la f. de Green: $G(x, x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{G}(K, x')\ e^{iK\,x} dK = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+K^2}\ e^{iK\,(x-x')} dK$

El problema ahora es resolver la anterior integral, que en el video se dice puede resolverse por un método llamado de "residuos en integración compleja". No obstante, a principio del video se demuestra, partiendo del resultado, que esa integral es:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+K^2}\, e^{iK\,(x-x')} dK = \pi \cdot e^{-|x-x'|}$$

Después demostraremos el resultado anterior. Ahora vamos a utilizarlo para obtener la función de Green:

$$G(x, x') = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+K^2}\ e^{iK\,(x-x')} dK = -\frac{1}{2\pi} \pi \cdot e^{-|x-x'|} \ \Rightarrow \quad G(x, x') = -\frac{1}{2} e^{-|x-x'|}$$

Por lo tanto, para la ecuación diferencial de nuestro ejemplo $\left[\frac{d^2}{dx^2} - 1\right] f(x) = x^2$ la solución la podemos obtener aplicando **(I)**:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, x')\, g(x')\, dx' = \int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{1}{2} e^{-|x-x'|} x'^2\, dx'$$

Resolviendo por partes esa integral (hay soluciones en el formulario de Crul) se llega a $f(x) = -x^2 - 2$ solución de la ecuación diferencial de nuestro ejemplo.

<u>Demostración de que se cumple</u>: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+K^2}\, e^{iK\,(x-x')} dK = \pi \cdot e^{-|x-x'|}$ (expresión que hemos utilizado antes)

Para hacer esta demostración (es lo primero que aparece en el video) <u>haremos la transformada de Fourier de la función</u> $\boldsymbol{\phi(x) = e^{-|x-x'|}}$. En primer lugar aplicamos **(II)** del resumen del V-13 para obtener las "funciones coeficientes":

$$\tilde{\phi}\,(K) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x)\; e^{-iK\,x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-x'|}\; e^{-iK\,x} dx$$

Consideramos dos tramos en la integral: cuando x< x´→ |x-x´|= x´–x y cuando x> x´ →|x-x´|= x–x´:

$$\tilde{\phi}\,(K) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x'} e^{x-x'-iKx}\, dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'}^{+\infty} e^{-x+x'-iKx} dx \;\; = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x'} e^{x(1-iK)-x'}\, dx \; + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x'}^{+\infty} e^{-x(1+iK)+x'} dx$$

$$\tilde{\phi}\,(K) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x'} \int_{-\infty}^{x'} e^{x(1-iK)} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{x'} \int_{x'}^{+\infty} e^{-x(1+iK)} dx \; = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x'} \left[\frac{e^{x(1-iK)}}{1-iK}\right]_{-\infty}^{x'} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{x'} \left[\frac{e^{-x(1+iK)}}{-(1+iK)}\right]_{x'}^{+\infty}$$

$$\tilde{\phi}\,(K) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x'} \left(\frac{e^{x'(1-iK)}}{1-iK} - 0\right) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{x'} \left(0 - \frac{e^{-x'(1+iK)}}{-(1+iK)}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-iKx'}}{1-iK} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-iKx'}}{1+iK} = \frac{e^{-iKx'}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{1-iK} + \frac{1}{1+iK}\right)$$

$$\tilde{\phi}\,(K) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-iKx'}}{1+K^2}$$

Aplicamos ahora **(I)** del resumen del V-13 para expresar la Transformada de Fourier de $\phi(x) = \boldsymbol{e^{-|x-x'|}}$**:**

$$\boldsymbol{e^{-|x-x'|}} = \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\phi}\,(K)\; e^{iK\,x} dK = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-iKx'}}{1+K^2}\; e^{iK\,x} dK = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-iKx'}}{1+K^2}\; e^{iK\,x} dK$$

Agrupando las exponenciales, finalmente nos queda:

$$\boldsymbol{e^{-|x-x'|} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+K^2}\, e^{iK(x-x')}\, dK}$$

Expresión que queríamos demostrar.